Intégration
Correction du TD 3

Exercice 3.1

1. Il suffit de tracer sinus sur $[0, \pi]$: Vaut 0 en $x = 0$, 1 en $x = \pi/2$, et 0 en $x = \pi$. Puis on répète ça sur tous les intervalles de longueur π (périodicité).
2. La fonction f est paire et π périodique, donc tous les coefficients b_n sont nuls. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \underbrace{\underbrace{|\sin(x)|}_{pair}\underbrace{\sin(nx\frac{2\pi}{\pi})}_{impair}}_{impair}\,\mathrm{d}x = 0 \tag{1}$$
Puis on calcule les coefficients a_n, en commençant par a_0 :
$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\sin(x)|\,\mathrm{d}x \overset{\sin(x)\geq 0 \text{ sur } [0,\pi]}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[-\cos(x)\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}. \tag{3}$$
Puis $\forall n \in \mathbb{N}^\star$,
$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\sin(x)|\cos(nx\frac{2\pi}{\pi})\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$
On ne sait pas intégrer tel quel ce genre de produit, on va donc faire ce qu'on appelle une linéarisation (transformer le produit en somme). Pour cela on utilise les (très pratiques) formules :
$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \end{cases} \tag{5}$$
Ici on voit que dans (4) on a quelque chose de la forme "sinus x cosinus" donc on va plutôt utiliser la formule du $\sin(a+b)$. En particulier on peut remarquer que
$$\begin{cases} \sin(2nx + x) = \sin(2nx)\cos(x) + \cos(2nx)\sin(x) & (6) \\ \sin(2nx - x) = \sin(2nx)\cos(-x) + \cos(2nx)\sin(-x) = \sin(2nx)\cos(x) - \cos(2nx)\sin(x)) & (7) \end{cases}$$
On voit donc qu'en faisant (6) - (7) on a presque ce qu'on veut et donc
$$\cos(2nx)\sin(x) = \frac{\sin((2n+1)x) - \sin((2n-1)x)}{2}. \tag{8}$$
Finalement on revient à (4) :
$$a_n(f) = \frac{2}{2\pi}\int_0^\pi \sin((2n+1)x)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{2\pi}\int_0^\pi \sin((2n-1)x)\,\mathrm{d}x \tag{9}$$
$$= \frac{-1}{\pi}\frac{\left[\cos((2n+1)x)\right]_0^\pi}{2n+1} + \frac{1}{\pi}\frac{\left[\cos((2n-1)x)\right]_0^\pi}{2n-1} \tag{10}$$
$$= \frac{2}{(2n+1)\pi} - \frac{2}{(2n-1)\pi} = \frac{-4}{(4n^2-1)\pi}. \tag{11}$$
3. Dans ce genre de questions il s'agit toujours d'utiliser astucieusement un des théorèmes de convergence. Souvent, quand on peut, on utilise celui de la convergence uniforme, si on ne peut pas Dirichlet et si on ne peut pas non plus alors Parseval.

Ici la fonction f est bien continue et les coefficients sont de somme finie : $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)| < +\infty$. On peut donc appliquer le théorème de convergence uniforme, et donc en tout point $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx\frac{2\pi}{\pi}) + b_n(f) \sin(nx\frac{2\pi}{\pi}) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(2nx). \tag{12}$$

Au vu de ce qui est demandé et de la question d'avant on sent qu'il faut faire apparaître $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ en choisissant en quel x on va évaluer l'équation 12. On remarque donc qu'en $x = 0$, on a $cos(2nx) = 1$, et donc,

$$0 = f(0) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(4n^2-1)\pi}. \tag{13}$$

D'où finalement,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)} = \frac{1}{2}$$

Exercice 3.2

1. Tracer une droite sur $[0, 2\pi[$ en excluant le point en 2π où f vaut π. Puis on répète cette droite sur les autres intervalles de taille 2π. Le but est de voir que f n'est pas continue mais continue par morceau (même $\mathcal{C}^\infty$ par morceau).
2. Comme à l'exercice d'avant on identifie les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$. on remarque que f n'est ni pair ni impaire à première vu [1], donc on a pas de raison à priori d'avoir $a_n(f) = 0$ ou $b_n(f) = 0$.
   Du coup on calcule :
   $$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{4\pi} = \pi. \tag{14}$$
   Puis,
   $$a_n(f) = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \cos(nx) \, \mathrm{d}x. \tag{15}$$
   On sait intégrer $\cos(nx)$ et x mais pas $x\cos(nx)$, on va donc faire une integration par parties. Puis,
   $$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{n} \, \mathrm{d}x. = 0 - 0 + \frac{1}{n\pi} \left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} = 0. \tag{16}$$
   On calcule enfin $b_n(f)$ avec le même genre de technique :
   $$b_n(f) = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \sin(nx) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi} \underbrace{[-x\cos(nx)]_0^{2\pi}}_{=2\pi-0} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nx) \, \mathrm{d}x \tag{17}$$
   $$= -\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2\pi} [\sin(nx)]_0^{2\pi} = -\frac{2}{n}. \tag{18}$$
   Finalement la série de Fourier partielle de f s'écrit $\forall N \geq 1$:
   $$f_N(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{N} b_n(f) \sin(nx\frac{2\pi}{2\pi}) = \pi - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n} \tag{19}$$
   La question est maintenant quelle convergence a t'on ? Comme dit dans l'exercice 1, le mieux est la convergence uniforme **mais** ici on a pas de continuité (cf dessin). En revanche f est C^1 par morceau, par le théorème de Dirichlet on a donc $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $$f_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{f^+(x) + f^-(x)}{2} \tag{20}$$
   Ici f^+ et f^- sont les limites à gauche et à droite de f en chaque point. Partout où f est continue on a donc $f(x) = \frac{f^+(x)+f^-(x)}{2}$, et en $x = 2\pi$ (modulo 2π), $\frac{f^+(x)+f^-(x)}{2} = \frac{0+2\pi}{2} = \pi$. Donc en conclusion
   $$f_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \begin{cases} f(x) & \forall x \in [0, 2\pi[\mod (2\pi) \\ \pi & x = 2\pi \mod (2\pi) \end{cases} \tag{21}$$
   NB : En fait $f(2\pi) = \pi$ donc on a $f_N \xrightarrow[N\to\infty]{} f$ pour tout x. Si on avait eu une autre valeur pour $f(2\pi)$, on n'aurait pas $f_N(x) \to f(x)$ pour tout x mais la méthode ci-dessus marcherait toujours.

1. On aurait pu remarquer que f peut être transformée en fonction impaire en faisant quelques translations mais on va plutôt faire le calcul.

Exercice 3.3

1. Il faut juste tracer des fonctions constantes sur chaque intervalle en suivant bien l'énoncé.
2. On calcule a_0 :

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{22}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(1(\frac{\pi}{3}-0)+0(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3})-1(\frac{4\pi}{3}-\frac{2\pi}{3})+0(\frac{5\pi}{3}-\frac{4\pi}{3})+1(\frac{6\pi}{3}-\frac{5\pi}{3})\right) \tag{23}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right) = 0 \tag{24}$$

NB : On aurait aussi pu remarquer que f est de moyenne nulle sur une période.

3. On remarque que f est paire, *i.e.* $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = f(-t))$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $b_n(f) = 0$.
4. Il faut calculer en décomposant l'intégrale sur chaque intervalle,

$$a_n(f) = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(\frac{2\pi}{2\pi}nt)\,\mathrm{d}t \tag{25}$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos(nt)\,\mathrm{d}t + 0 - \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos(nt)\,\mathrm{d}t + 0 \tag{26}$$
$$= \frac{1}{n\pi}\left[\sin(nt)\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} - \frac{1}{n\pi}\left[\sin(nt)\right]_{2\pi/3}^{4\pi/3} \tag{27}$$
$$= \frac{1}{n\pi}\left(\sin(\frac{n\pi}{3})-\sin(\frac{-n\pi}{3})\right) - \frac{1}{n\pi}\left(\sin(\frac{4n\pi}{3})-\sin(\frac{2n\pi}{3})\right) \tag{28}$$
$$= \frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{3}) - \frac{1}{n\pi}\left(\sin(\frac{4n\pi}{3})-\sin(\frac{2n\pi}{3})\right) \tag{29}$$

En utilisant les formules de trigo (ou en traçant le cercle), on peut remarquer que $\sin(\frac{4n\pi}{3}) = -\sin(\frac{2n\pi}{3})$, d'où

$$a_n(f) = \frac{2}{n\pi}\left(\sin(\frac{n\pi}{3})+\sin(\frac{2n\pi}{3})\right) \tag{30}$$

5. On commence par calculer les coefficients de Fourier de S.

$$c_n(S) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t \tag{31}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t+\frac{2\pi}{3})e^{-int}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t+\frac{4\pi}{3})e^{-int}\,\mathrm{d}t \tag{32}$$

On fait des changements de variables dans les intégrales pour faire apparaître les coefficients de Fourier de f partout.

$$c_n(S) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t \tag{33}$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-in(t-\frac{2\pi}{3})}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-in(t-\frac{4\pi}{3})}\,\mathrm{d}t \tag{34}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\left(1+e^{-in\frac{2\pi}{3}}+e^{-in\frac{4\pi}{3}}\right)\,\mathrm{d}t \tag{35}$$

NB : Pas besoin de décaler les bornes de l'intégrale car la fonction est 2π-périodique.
Ensuite on peut remarquer que

$$1+e^{-in\frac{2\pi}{3}}+e^{-in\frac{4\pi}{3}} = 1+e^{-in\frac{2\pi}{3}}+e^{in\frac{2\pi}{3}} = 1+2\cos(\frac{2n\pi}{3}) \tag{36}$$

Enfin, même si c'est pénible, on énumère les cas à la main en fonction de n. Heureusement on voit que $x \mapsto \cos(\frac{2\pi}{3}x)$ est une fonction 3 périodique, donc on énumère tous les cas de $n = 0$ à $n = 2$.
— $n = 0$, on a $1+2\cos(\frac{2n\pi}{3}) = 1+2\cos(0) = 1+2 = 3$
— $n = 1$, on a $1+2\cos(\frac{2n\pi}{3}) = 1+2\cos(\frac{2\pi}{3}) = 1-2\frac{1}{2} = 0$
— $n = 2$, on a $1+2\cos(\frac{2n\pi}{3}) = 1+2\cos(\frac{4\pi}{3}) = 1-2\frac{1}{2} = 0$

Ensuite par périodicité on a $n = 3$, etc...

Finalement, si les coefficients $c_{3n}(S)$ sont nuls, alors tous les $c_n(S)$ sont nuls et donc on a aussi $S \equiv 0$ donc le système est équilibré.

6. Il faut voir si $c_{3n}(S) = 0$. Pour commencer on a calculé que

$$\begin{aligned} c_{3n}(S) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-i3nt}\left(1 + e^{-i3n\frac{2\pi}{3}} + e^{-i3n\frac{4\pi}{3}}\right) \mathrm{d}t = 3\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-i3nt}\,\mathrm{d}t && (37)\\ &= 3c_{3n}(f) && (38)\end{aligned}$$

Donc on a juste à vérifier que $c_{3n}(f) \neq 0$. Or on peut exprimer $c_n(f)$ en fonction de $a_n(f)$ et $b_n(f)$:

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}. \qquad (39)$$

Dans notre cas on a simplement $c_n(f) = \frac{a_n(f)}{2}$, donc en utilisant la question 4 on obtient,

$$\begin{aligned} c_{3n}(S) &= 3c_{3n}(f) = \frac{3}{2}a_{3n}(f) && (40)\\ &= \frac{3}{n\pi}\left(\sin(\frac{3n\pi}{3}) + \sin(\frac{6n\pi}{3})\right) = \frac{3}{n\pi}\left(\sin(n\pi) + \sin(2n\pi)\right) = 0. && (41)\end{aligned}$$

Donc le système est bien équilibré.